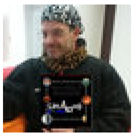
RISORSE DIDATTICHE.



【ResearchGate Project】 *By ... 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

LEZIONE 4

Le figure simili

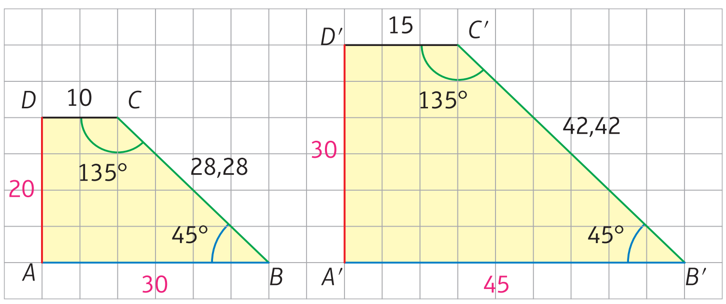
Poligoni simili

ESPLORA

Trapezi simili **I due trapezi nella figura hanno stessa forma ma diverse dimensioni. Gli angoli del primo trapezio sono congruenti agli angoli corrispondenti del secondo.**

a. Misura i lati dei trapezi e scrivi i risultati nella figura, espressi in millimetri.

b. Calcola i rapporti di tutte le coppie di lati corrispondenti:



Gli **angoli** e i **lati corrispondenti** sono quelli che si trovano nella stessa posizione relativa nelle due figure. Per esempio:

- $\widehat{C}$ e $\widehat{C}'$ sono angoli corrispondenti;
- BC e $B'C'$ sono lati corrispondenti

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{45\ \text{mm}}{30\ \text{mm}} = \frac{3}{2} \qquad \frac{B'C'}{BC} = \frac{42{,}42\ \text{mm}}{28{,}28\ \text{mm}} = \frac{3}{2}$$

le misure di BC e $B'C'$ sono approssimate

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{15\ \text{mm}}{10\ \text{mm}} = \frac{3}{2} \qquad \frac{D'A'}{DA} = \frac{30\ \text{mm}}{20\ \text{mm}} = \frac{3}{2}$$

Osserviamo che i **rapporti** fra i lati corrispondenti sono tutti **uguali**.

Poiché $\frac{3}{2} = 1{,}5$ possiamo dire che le misure dei lati del trapezio $A'B'C'D'$ sono 1,5 volte più grandi di quelle del trapezio $ABCD$.

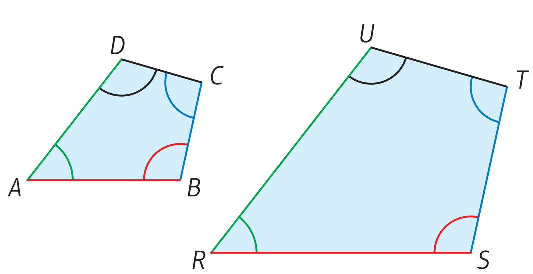
CONCETTO CHIAVE

Poligoni simili e rapporto di similitudine

Due poligoni sono **simili** se hanno:

1) gli **angoli** corrispondenti **congruenti**;
2) i **lati** corrispondenti in **proporzione**.

Il rapporto costante fra le misure dei lati corrispondenti si chiama **rapporto di similitudine** (o **di scala**) e si indica con la lettera ***k***.



In pratica, il rapporto di similitudine è la stessa cosa del rapporto di scala che hai già studiato.

angoli congruenti: $\widehat{A} \cong \widehat{R}$; $\widehat{B} \cong \widehat{S}$; $\widehat{C} \cong \widehat{T}$; $\widehat{D} \cong \widehat{U}$

lati in proporzione: $\frac{RS}{AB} = \frac{ST}{BC} = \frac{TU}{CD} = \frac{UR}{DA} = k$

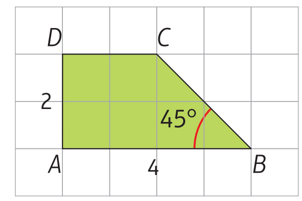
0080_9788839527189B@0145-0177.indd 156 14/01/19 16:19

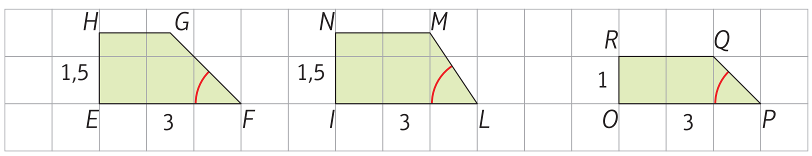
Attenzione. Per dimostrare che due poligoni sono simili tra loro, bisogna verificare che valgano **entrambe le condizioni**, cioè che essi abbiano:

gli angoli corrispondenti congruenti **e anche** i lati corrispondenti in proporzione

ESERCIZIO GUIDA CON VIDEO TUTORIAL

1 Riconosci **Quale dei trapezi qui sotto è simile al trapezio *ABCD* della figura a fianco? Motiva la risposta.**





Dobbiamo misurare **tutti** i lati e **tutti** gli angoli e verificare le due condizioni.

Trapezio *EFGH*
Gli angoli corrispondenti sono congruenti.
I lati corrispondenti sono in proporzione, per esempio:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{HE}}=\frac{4}{3}$$

È **simile**.

Trapezio *ILMN*
Gli angoli corrispondenti **non** sono congruenti.
I lati corrispondenti **non** sono in proporzione, per esempio:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{IL}}=\frac{4}{3};\ \frac{\overline{CD}}{\overline{MN}}=\frac{2}{2}=1$$

Non è simile.

Trapezio *OPQR*
Gli angoli corrispondenti sono congruenti.
I lati corrispondenti **non** sono in proporzione, per esempio:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}}=\frac{4}{3};\ \frac{\overline{DA}}{\overline{RO}}=2$$

Non è simile.

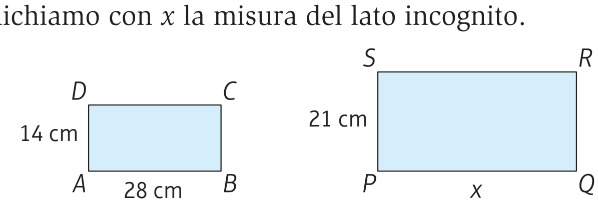
Come trovare una misura incognita

Applicando una opportuna **proporzione** fra i lati di due figure simili, possiamo trovare una misura che non conosciamo, cioè una misura incognita.

ESERCIZIO GUIDA

2 Rettangoli simili **Abbiamo due rettangoli simili. La base e l'altezza del primo sono lunghe rispettivamente 28 cm e 14 cm. Del secondo rettangolo sappiamo soltanto che l'altezza misura 21 cm.**
Quanto è lunga la base del secondo rettangolo?

1) Disegniamo un modello del problema.
Indichiamo con x la misura del lato incognito.



2) Siccome i rettangoli sono simili, hanno i lati corrispondenti in proporzione. Possiamo allora scrivere e risolvere la seguente proporzione:

$\overline{SP} : \overline{DA} = \overline{PQ} : \overline{AB}$

Sostituiamo le misure e ricaviamo la x:

$21 : 14 = x : 28 \qquad x = \frac{21 \cdot 28}{14} = 42$ cm

Per trovare una misura incognita puoi anche usare il **rapporto di similitudine** (o di scala).
In questo problema, per esempio, si riconosce che il fattore di scala è:

$$k=\frac{\overline{SP}}{\overline{DA}}=\frac{21}{14}=1{,}5$$

Quindi le lunghezze dei lati del rettangolo *PQRS* sono 1,5 volte più grandi di quelle dei lati del rettangolo *ABCD*.
Perciò:

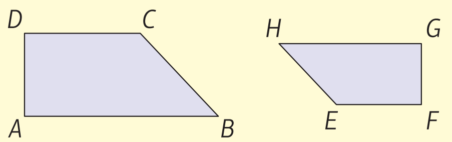
$$\overline{PQ}=1{,}5\cdot\overline{AB}=42 \text{ cm}$$

0080_9788839527189B@0145-0177.indd 157 14/01/19 16:19

ESERCIZI DELLA LEZIONE 4

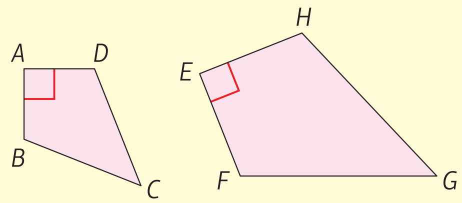
CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE

1 Lati corrispondenti I due trapezi in figura sono simili. Trova i lati corrispondenti. Completa la tabella.



Il lato corrispondente di...	è...
AB	*GH*
BC	*HE*
CD	*EF*
DA	*FG*

2 Angoli corrispondenti I due quadrilateri sono simili. Trova gli angoli corrispondenti. Completa la tabella.

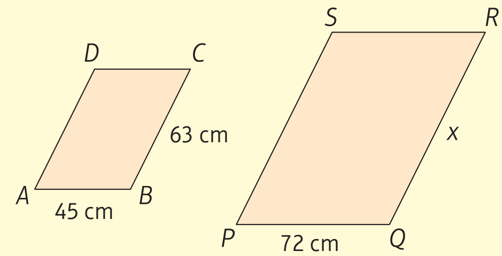


L'angolo corrispondente di...	è...
$\hat{A}$	$\hat{E}$
$\hat{B}$	$\hat{F}$
$\hat{C}$	$\hat{G}$
$\hat{D}$	$\hat{H}$

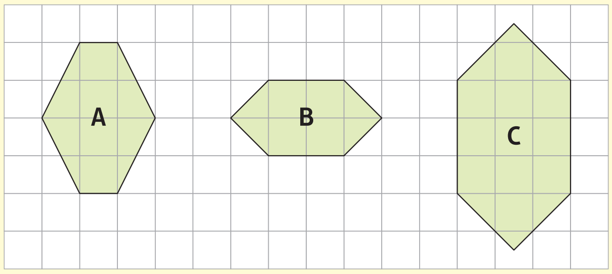
3 Poligoni simili Completa la seguente definizione.
Due poligoni sono simili se hanno:
- gli angoli corrispondenti congruenti
- i lati corrispondenti in proporzione

4 Rapporto di similitudine Completa la seguente definizione.
Il rapporto di similitudine è il rapporto costante fra le misure dei lati corrispondenti e si indica con *k*

5 Con la proporzione I due quadrilateri in figura sono simili. Spiega come si fa, con una proporzione, per trovare la lunghezza del lato incognito, indicato con la lettera *x*.
ESERCIZIO GUIDA 2 $72 : 45 = x : 63$



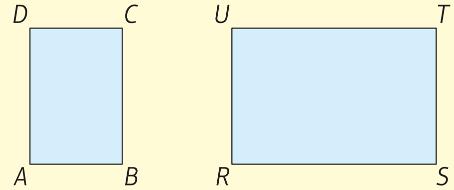
6 Simile-non simile Spiega perché:
a. l'esagono A non è simile all'esagono B;
b. l'esagono B è simile all'esagono C.
ESERCIZIO GUIDA 1



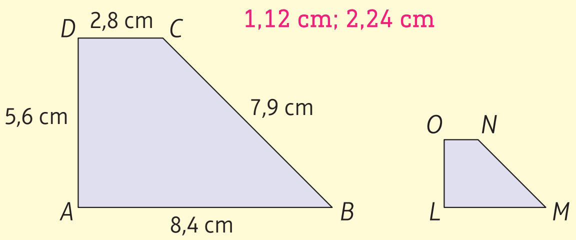
7 Sono simili? Un rettangolo ha la base lunga 12 cm e l'altezza lunga 1 cm. Un altro rettangolo ha la base lunga 6 cm e l'altezza 5 mm. I due rettangoli sono simili oppure no? Motiva la risposta.
sì perché hanno tutti gli angoli congruenti e i lati corrispondenti nella stessa proporzione, 5 mm = 0,5 cm

APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI

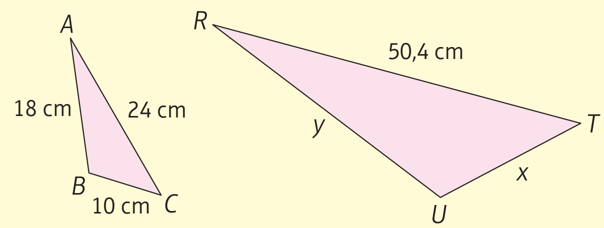
8 Rettangoli I due rettangoli sono simili.
Si sa che $\overline{UR} = 45$ m, $\overline{DA} = 45$ m, $\overline{AB} = 30$ m.
Calcola il rapporto di similitudine e la lunghezza del lato *TU*.
$k = 1{,}5$; $\overline{TU} = 67{,}5$ m



9 Trapezi I due trapezi in figura sono simili. Il rapporto di similitudine è 0,4.
Calcola le lunghezze di tutti i lati del trapezio *LMNO*. 3,36 cm; 3,16 cm; 1,12 cm; 2,24 cm



10 Triangoli I due triangoli in figura sono simili. Calcola le misure incognite indicate con le lettere *x*, *y*. ESERCIZIO GUIDA 2



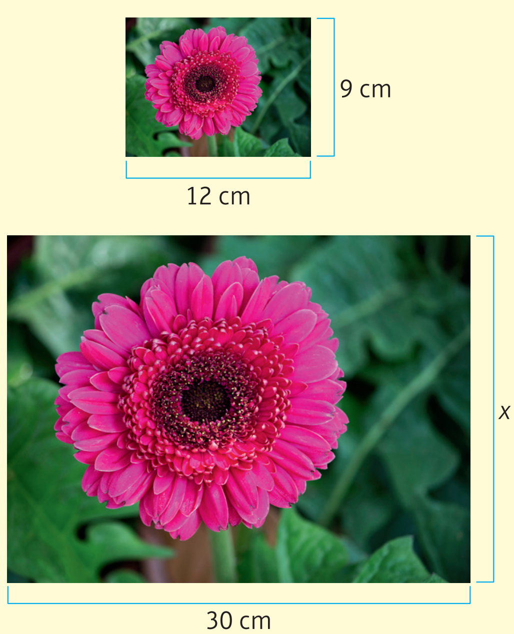
$x = 21$ cm; $y = 37{,}8$ cm

11 Comprendi e risolvi In un triangolo rettangolo i cateti misurano 12 cm e 35 cm mentre l'ipotenusa misura 37 cm.
In un altro triangolo rettangolo, simile al primo, il cateto minore misura 102 cm.
Calcola l'ipotenusa del secondo rettangolo. [314,5 cm]

RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

12 MONDO REALE **Fotografia** Katia vuole ingrandire una fotografia 12 cm × 9 cm in modo che il lato più lungo sia 30 cm.

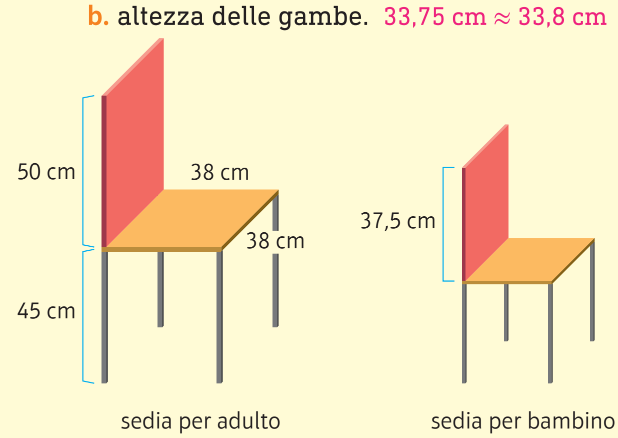
a. Quali saranno le dimensioni della foto ingrandita? 30 cm × 22,5 cm
b. Qual è il rapporto di similitudine? 2,5



13 Problema aperto Scrivi un problema relativo al mondo reale che si possa risolvere usando le proporzioni e le figure simili. Risolvi il problema.

14 MONDO REALE **Sedie** Una sedia per bambino è simile a una sedia per adulto, ma è più piccola.
Usa i dati della figura per calcolare le seguenti misure della sedia per bambino:

a. lato del sedile; 28,5 cm
b. altezza delle gambe. 33,75 cm ≈ 33,8 cm



15 COME UN MATEMATICO **Dimostrazioni**
Dimostra che:

a. tutti i quadrati sono simili;
b. tutti i triangoli equilateri sono simili;
c. non è vero che tutti i rettangoli sono simili;
d. tutti gli esagoni regolari sono simili.

Altri esercizi a pag. G186

LEZIONE 5

Criteri di similitudine dei triangoli

In questa lezione studieremo tre criteri che permettono di identificare i triangoli simili. Ricorda che valgono solo per i triangoli e non per gli altri poligoni.

Primo criterio: 3 angoli congruenti

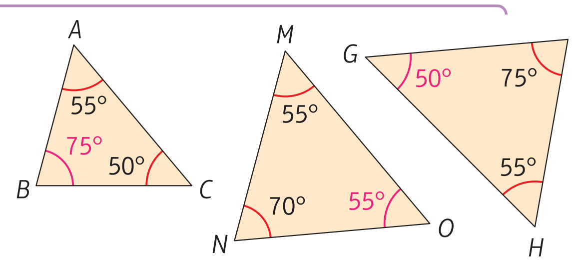
CONCETTO CHIAVE **Primo criterio di similitudine dei triangoli**

Due triangoli sono simili se hanno i **tre angoli corrispondenti congruenti**.

Poiché la somma degli angoli interni di ogni triangolo è 180°, **basta che due triangoli abbiano due angoli corrispondenti congruenti** perché siano simili. Anche il terzo angolo, infatti, sarà congruente per differenza da 180°.

ESERCIZIO GUIDA

1 Riconosci Nella figura ci sono due triangoli simili. Quali sono? Motiva la risposta.



1) Calcoliamo tutti gli angoli mancanti.

Triangolo *ABC*	55°, 75°, 50°
Triangolo *MNO*	55°, 70°, 55°
Triangolo *GHI*	55°, 75°, 50°

2) I triangoli simili sono *ABC* e *GHI* perché hanno i tre angoli corrispondenti congruenti.

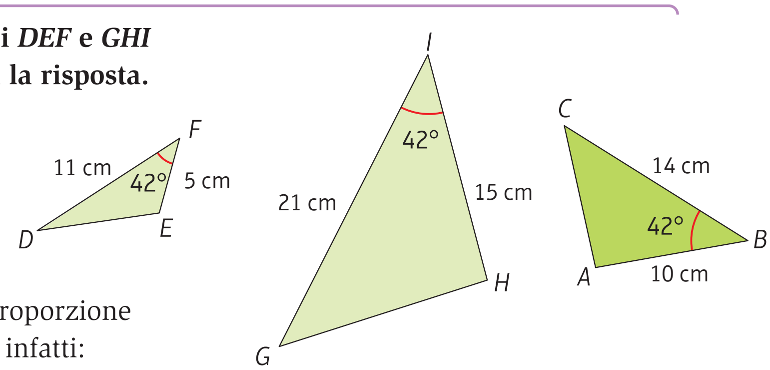
Secondo criterio: 2 lati e l'angolo compreso

CONCETTO CHIAVE **Secondo criterio di similitudine dei triangoli**

Due triangoli sono simili se hanno **due lati corrispondenti in proporzione e l'angolo compreso congruente**.

ESERCIZIO GUIDA

2 Riconosci Quale dei due triangoli *DEF* e *GHI* è simile al triangolo *ABC*? Motiva la risposta.



1) I tre triangoli hanno un angolo congruente, perciò dobbiamo verificare se i lati corrispondenti sono in proporzione.

2) I lati del triangolo *GHI* sono in proporzione con i corrispondenti lati di *ABC*; infatti:

$$\frac{21}{14} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

3) Invece, i lati dei triangoli *DEF* e *ABC* non formano una proporzione; infatti: $\frac{11}{14} \neq \frac{5}{10}$

I triangoli simili sono quindi *ABC* e *GHI*.

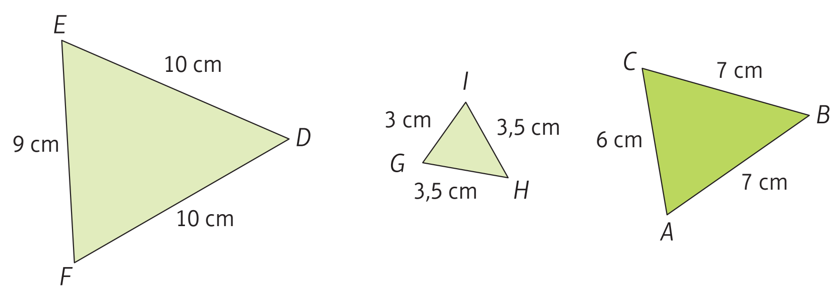
Terzo criterio: 3 lati in proporzione

CONCETTO CHIAVE **Terzo criterio di similitudine dei triangoli**

Due triangoli sono simili se hanno i **tre lati corrispondenti in proporzione**.

ESERCIZIO GUIDA

3 Riconosci Quale dei due triangoli *DEF* e *GHI* è simile al triangolo *ABC*? Motiva la risposta.



1) Esaminando le misure si verifica facilmente che i lati del triangolo *GHI* sono tutti la metà dei corrispondenti lati del triangolo *ABC*. Quindi il triangolo *ABC* è simile al triangolo *GHI* e il rapporto di similitudine vale $\frac{1}{2}$.

2) Se invece confrontiamo i lati di *DEF* con quelli corrispondenti di *ABC*, verifichiamo che non sono in proporzione. Infatti:

$$\frac{10}{7} \neq \frac{9}{6}$$

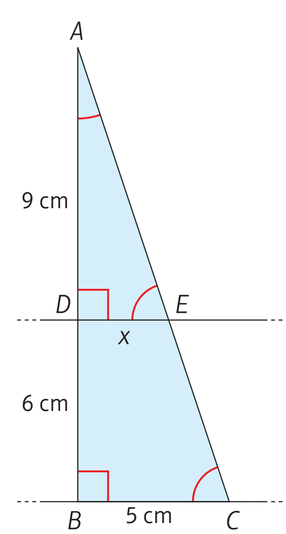
Attenzione. Per dimostrare che due triangoli sono simili tra loro, basta verificare che valga **uno solo** dei tre criteri.

Rette parallele e triangoli simili

Quando si taglia un triangolo con una retta parallela a un lato, si formano due triangoli simili. Vediamo un esempio.

ESERCIZIO GUIDA CON VIDEO TUTORIAL

4 Triangoli rettangoli Osserva la figura. Il triangolo *ABC* è un triangolo rettangolo. La retta *DE* è parallela al lato *BC*.
Usa i dati scritti nella figura per calcolare la lunghezza di *DE*, indicata con la lettera *x*.



1) Osserviamo che i triangoli *ABC* e *ADE* sono simili perché hanno i tre angoli corrispondenti congruenti: $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ perché retti, $\widehat{A}$ è in comune ai due triangoli, $\widehat{C} \cong \widehat{E}$ perché corrispondenti di rette parallele tagliate dalla trasversale *AC*.

2) Calcoliamo la lunghezza di *AB*:

$$\overline{AB} = 9 + 6 = 15 \text{ cm}$$

3) Scriviamo la proporzione fra i lati dei due triangoli:

$$AD : AB = DE : BC$$

4) Sostituiamo le lunghezze e troviamo il valore di *x*:

$$9 : 15 = x : 5$$

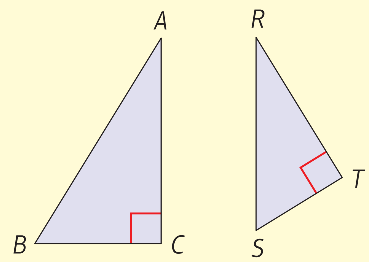
$$x = \frac{9 \cdot 5}{15} = 3 \text{ cm}$$

0080_9788839527189B@0145-0177.indd 161 14/01/19 16:19

ESERCIZI DELLA LEZIONE 5

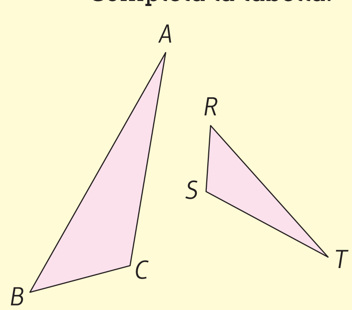
CONOSCERE — CONCETTI E PROCEDURE

1 Lati corrispondenti I due triangoli sono simili. Trova i lati corrispondenti. Completa la tabella.



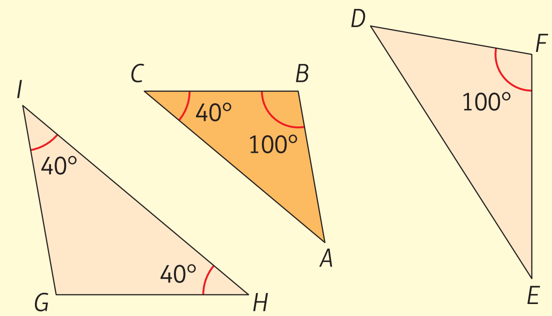
Il lato corrispondente di...	è...
AB	*RS*
BC	*ST*
CA	*TR*

2 Angoli corrispondenti I due triangoli sono simili. Trova gli angoli corrispondenti. Completa la tabella.



L'angolo corrispondente di...	è...
$\hat{A}$	$\hat{T}$
$\hat{B}$	$\hat{R}$
$\hat{C}$	$\hat{S}$

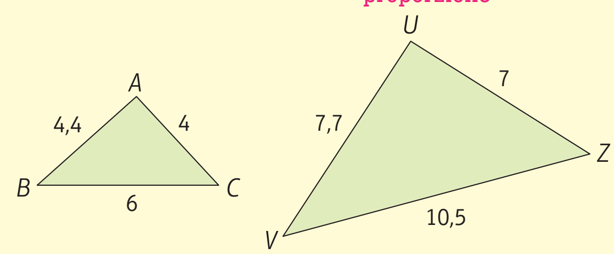
3 Individua Quale triangolo è simile al triangolo *ABC*? *GHI*



4 Riconosci Dimostra che i due triangoli sono simili e spiega quale criterio hai applicato.
Le misure sono espresse in metri.

ESERCIZI GUIDA 1, 2, 3

terzo criterio: lati in proporzione

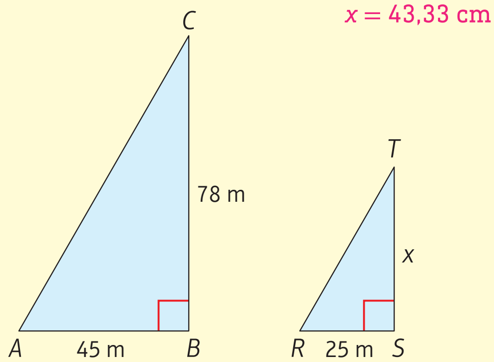


5 Equilateri Un triangolo equilatero ha il lato lungo 5 cm. Un altro triangolo equilatero ha il lato lungo 99 cm.
I due triangoli sono simili fra loro? Per quale criterio di similitudine? sì, per il primo criterio

APPLICARE — STRATEGIE E MODELLI

6 Lato incognito I due triangoli in figura sono simili. Calcola il valore di *x*.

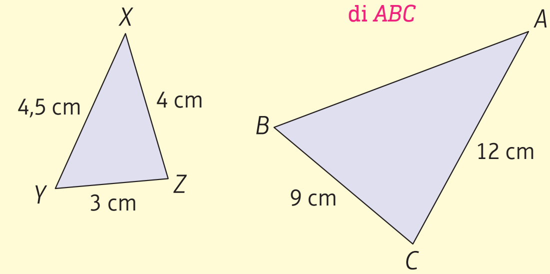
$x = 43{,}33$ cm



7 A mente Il triangolo *ABC* è simile al triangolo *XYZ*.

a. Calcola mentalmente la lunghezza del lato *AB*. 13,5 cm

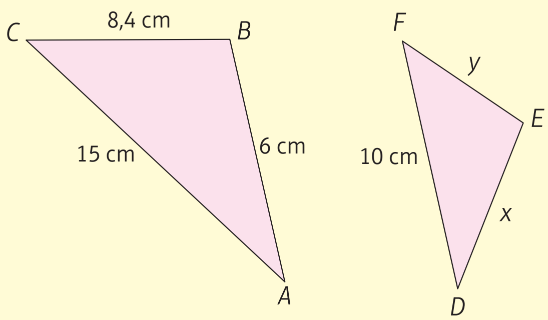
b. Spiega il procedimento. i lati di *XYZ* sono un terzo dei corrispondenti lati di *ABC*



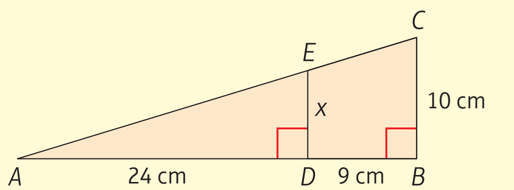
0080_9788839527189B@0145-0177.indd 162 14/01/19 16:19

RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

8 Perimetro I triangoli *ABC* e *DEF* sono simili.
Calcola il perimetro del triangolo *DEF*. [19,6 cm]



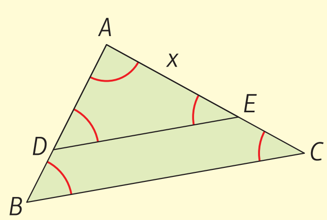
9 Triangolo rettangolo Usa i dati scritti nella figura per calcolare la misura di *ED* e il perimetro del triangolo *ADE*.
ESERCIZIO GUIDA 4 [7,27 cm; 56,35 cm]



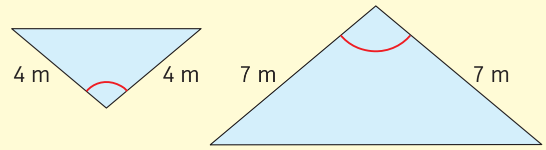
10 Lati paralleli Nel triangolo *ABC*, il segmento *DE* è parallelo al lato *BC*.

a. Spiega perché i triangoli *ABC* e *ADE* sono simili. primo criterio, angoli congruenti

b. Sapendo che $\overline{BC} = 12$ cm, $\overline{DE} = 8$ cm, $\overline{AC} = 9{,}6$ cm, calcola la lunghezza di *AE*, indicata con *x*. [6,4 cm]

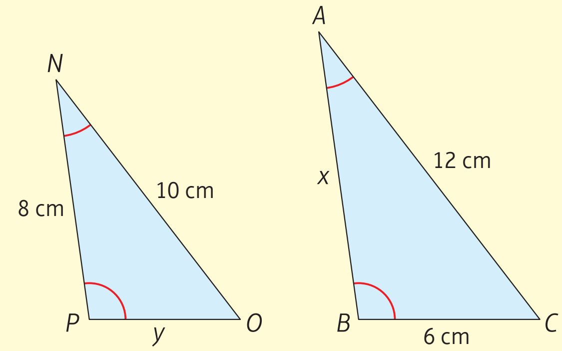


11 Sono simili? I due triangoli rappresentati nella figura sono simili oppure no?
Motiva la risposta.



sì, perché sono isosceli e hanno gli angoli al vertice congruenti

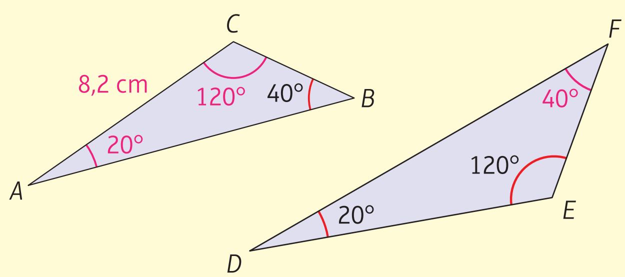
12 Due lati I triangoli *ABC* e *NPO* sono simili.
Calcola le lunghezze dei lati *AB* e *PO*, indicate con *x* e *y*. $x = 9{,}6$ cm; $y = 5$ cm



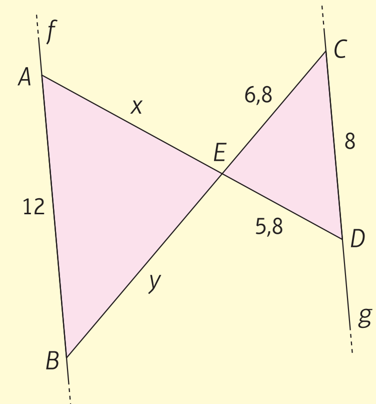
13 Lati e angoli I due triangoli *ABC* e *DEF* sono simili. Sapendo che $\overline{EF} = 6{,}6$ cm, $\overline{BC} = 4{,}4$ cm, $\overline{DE} = 12{,}3$ cm, calcola e scrivi nella figura:

a. le misure di tutti gli angoli dei triangoli;

b. la lunghezza di *AC*. $\overline{AC} = 8{,}2$ cm



14 Triangoli opposti Nella seguente figura le rette *f* e *g* sono parallele.



I due triangoli *ABE* e *DCE* sono simili.

a. Qual è l'angolo corrispondente di $\widehat{D}$? $\widehat{A}$

b. Qual è il lato corrispondente di *EC*? *EB*

c. Calcola le lunghezze dei lati indicati con *x* e *y*. Le misure sono espresse in metri. $x = 8{,}7$; $y = 10{,}2$

Altri esercizi a pag. G192

LEZIONE 6

Applicazioni della similitudine

Misure indirette

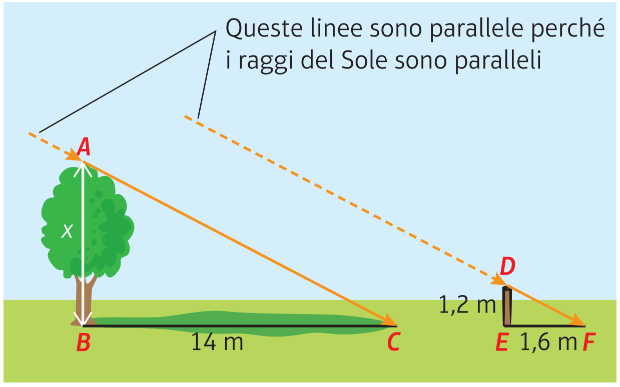
- Quanto è alto un albero?
- Quanto è lungo un batterio?
- Quanto è largo un lago?

Spesso in situazioni come queste è praticamente impossibile misurare direttamente un oggetto perché è troppo grande o troppo piccolo o irraggiungibile con uno strumento di misura.
Dobbiamo allora ricorrere a **misurazioni indirette**, usando le **proprietà dei triangoli simili** e risolvendo delle **proporzioni**.
Vediamo tre esempi.

Sfruttare le ombre

ESERCIZIO GUIDA

1 Altezza di un albero **In una bella giornata soleggiata, un albero in un prato fa un'ombra lunga 14 m.**
Nello stesso momento un'asta verticale alta 1,2 m fa un'ombra lunga 1,6 m.
Quanto è alto l'albero?



1) Come si vede nella figura, l'asta, la sua ombra e i raggi del Sole formano il triangolo rettangolo *DEF*. Anche l'albero, la sua ombra e i raggi del Sole formano un triangolo rettangolo, indicato con le lettere *ABC*.
2) Poiché i raggi del Sole sono paralleli, i due triangoli *ABC* e *DEF* hanno i tre angoli corrispondenti congruenti, perciò sono simili (primo criterio di similitudine).
3) Indichiamo con x l'altezza dell'albero e scriviamo la proporzione fra i lati dei due triangoli:

$$AB : DE = BC : EF$$

$$x : 1{,}2 = 14 : 1{,}6$$

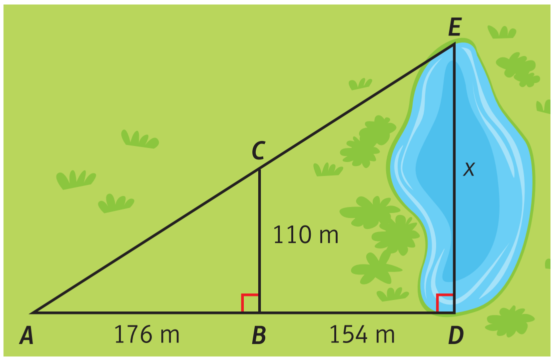
$$x = \frac{1{,}2 \cdot 14}{1{,}6} = 10{,}5 \text{ m}$$

L'albero è alto 10,5 m.

Evitare gli ostacoli

ESERCIZIO GUIDA

2 Larghezza di un lago **Il signor Giulio vuole misurare la larghezza di un piccolo lago che si trova in un parco. Misurare le distanze sull'acqua è difficile mentre è più facile fare delle misurazioni sul terreno intorno al lago. La piantina a lato mostra le misurazioni fatte da Giulio.**
Usa i dati scritti nella piantina per calcolare la larghezza del lago, indicata con la lettera *x*.



1) I triangoli rettangoli ABC e ADE hanno i tre angoli corrispondenti congruenti, perciò sono simili (primo criterio di similitudine).
2) Scriviamo la proporzione fra i lati dei due triangoli:

$$AB : AD = BC : DE$$

$$176 : 330 = 110 : x$$

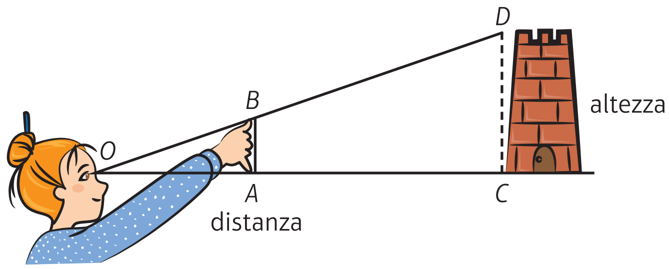
$$x = \frac{330 \cdot 110}{176} = 206{,}25 \text{ m}$$

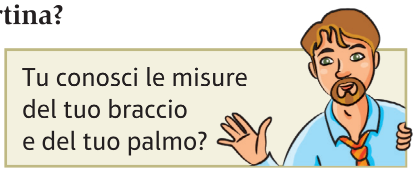
Il lago è largo circa 206 m.

Usare le proiezioni

ESERCIZIO GUIDA

3 Stime con la mano **Osserva lo schema seguente. Cosa fa Martina?**





Le misure di Martina sono:
- $\overline{OA} = 45$ cm
- $\overline{AB} = 15$ cm

Il gesto che fa Martina può servire a due scopi diversi: stimare l'**altezza della torre** oppure stimare la **distanza della torre** da Martina.
Lo schema contiene infatti due **triangoli simili**: OAB e OCD.
Possiamo allora scrivere la proporzione fra i loro lati:

$OA : OC = AB : CD$ o anche 45 : distanza = 15 : altezza

Consideriamo due possibilità.

Se Martina conosce la distanza della torre, può calcolarne l'**altezza**:

$$\text{altezza} = \frac{15 \cdot \text{distanza}}{45}$$

Per esempio, se la torre dista 30 m (3000 cm) allora è alta:

$$\text{altezza} = \frac{15 \cdot 3000}{45} = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$$

Se Martina conosce l'altezza della torre, può calcolare la **distanza**:

$$\text{distanza} = \frac{45 \cdot \text{altezza}}{15}$$

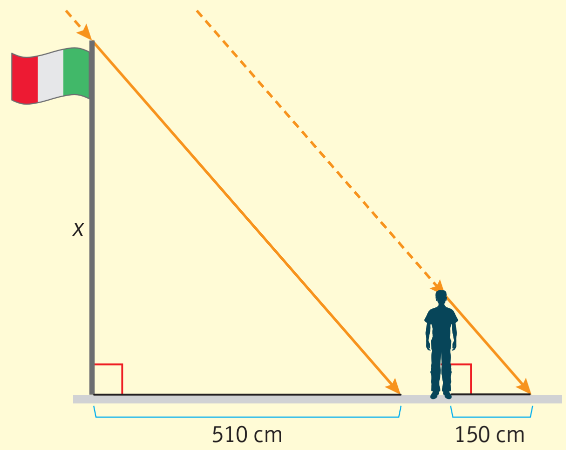
Per esempio, se la torre è alta 12 m (1200 cm) allora dista:

$$\text{distanza} = \frac{45 \cdot 1200}{15} = 3600 \text{ cm} = 36 \text{ m}$$

ESERCIZI DELLA LEZIONE 6

CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE

1 Altezza della bandiera Nella figura vedi le ombre prodotte da una bandiera e da un ragazzo.
Se il ragazzo è alto 1,72 m, quanto è alta la bandiera? ESERCIZIO GUIDA 1 circa 5,85 m



2 Altezza dell'albero In una giornata di sole, un albero in un prato fa un'ombra lunga 18 m.
Nello stesso momento un'asta verticale alta 80 cm fa un'ombra lunga 1,2 m.

a. Disegna un modello della situazione descritta dal problema.
b. Calcola quanto è alto l'albero. 12 m

Ricordati di esprimere tutte le misure nella stessa unità.

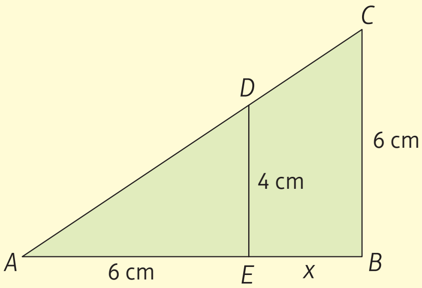
3 Misura indiretta Fai riferimento all'esercizio precedente per spiegare con parole tue cosa s'intende per *misura indiretta*.

APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI

4 Triangoli rettangoli Osserva la figura.
Gli angoli $\widehat{B}$ ed $\widehat{E}$ sono retti.

a. Calcola il valore di x.
b. Calcola il perimetro del triangolo ABC.

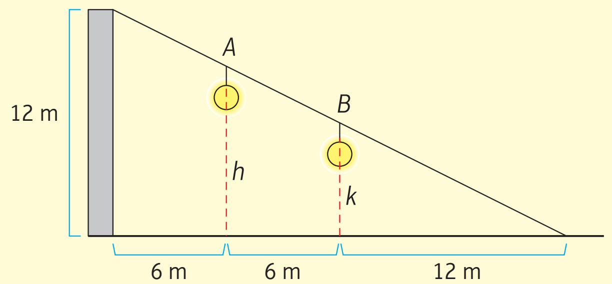
[a. 3 cm; b. ≈ 25,82 cm]



I triangoli *ABC* e *ADE* sono simili, perciò scrivo la proporzione:
$DE : BC = AE : AB$

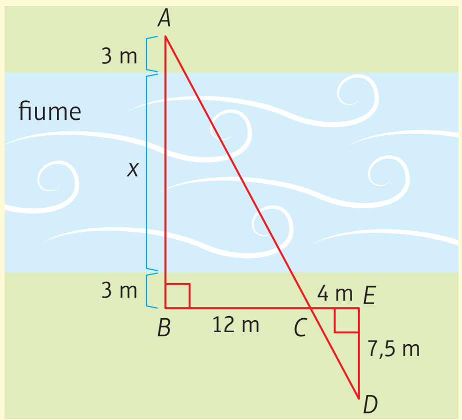
5 MONDO REALE **Lampade appese** Due lampade sono appese a una corda tesa tra l'estremità di un muro e un picchetto fissato a terra, come schematizzato nella figura.

a. A quale altezza h dal suolo si trova il punto A in cui è appesa una lampada? 9 m
b. A quale altezza k si trova il punto B in cui è appesa l'altra lampada? 6 m



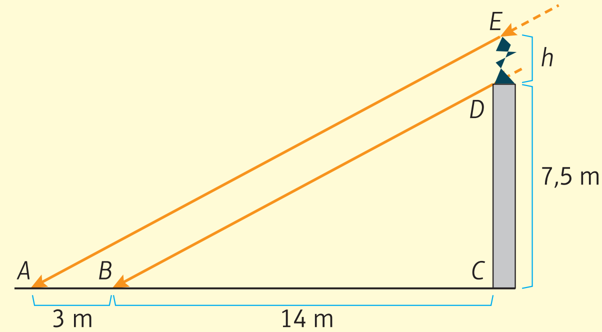
6 MONDO REALE **Larghezza del fiume** La figura illustra un metodo per misurare la larghezza x di un fiume. ESERCIZIO GUIDA 2

a. Spiega a un tuo amico come funziona il metodo.
b. Calcola il valore di x. [$x = 16,5$ m]

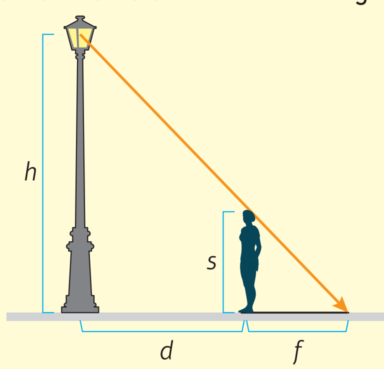


RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

7 Altezza della scultura Una scultura è posta in cima a una colonna alta 7,5 m.
L'ombra della colonna è lunga 14 m mentre l'ombra della scultura è lunga 3 m.
Calcola l'altezza della scultura. [1,61 m circa]



8 Ombra con variabili Osserva la figura.

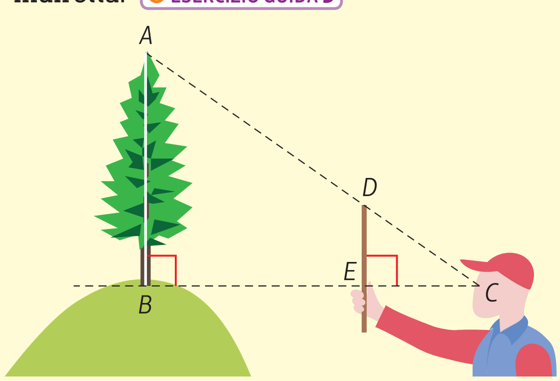


Sai che:
- il lampione è alto $h = 4{,}2$ m;
- l'ombra di Giulia è lunga $f = 2{,}04$ m;
- Giulia dista $d = 3$ m dal lampione.

a. Scrivi una proporzione, usando le lettere, che permetta di calcolare la statura s di Giulia. $h : s = (d + f) : f$

b. Calcola quanto è alta Giulia. [b. 1,7 m]

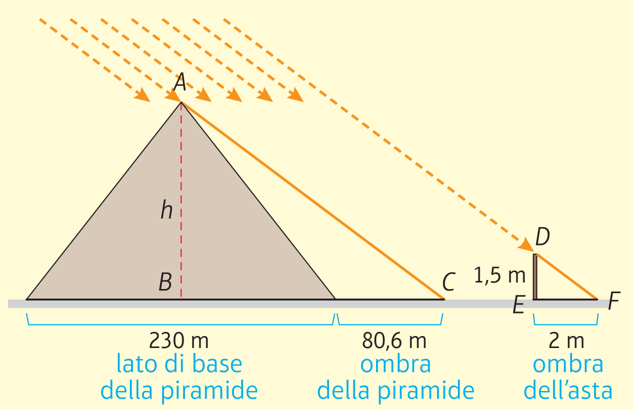
9 MONDO REALE Boscaiolo La figura mostra il boscaiolo Giuseppe mentre misura l'altezza di un albero con una procedura indiretta. ESERCIZIO GUIDA 3



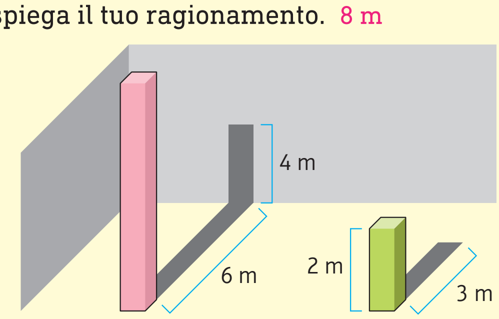
Sapendo che:
- $\overline{EC} = 70$ cm
- $\overline{ED} = 60$ cm
- $\overline{BC} = 30$ m

calcola l'altezza dell'albero. [25,7 m circa]

10 MONDO REALE Piramide di Cheope
Osserva il modello. La piramide di Cheope ha per base un quadrato di lato 230 m.
A una certa ora del giorno essa proietta un'ombra lunga 80,6 m a partire dalla base.
Alla stessa ora, un'asta alta 1,5 m proietta un'ombra di 2 m.
Usa i dati forniti per calcolare l'altezza della piramide. [146,7 m]



11 SFIDA Ombra spezzata Quanto è alta la colonna rosa? Risolvi il problema a mente e spiega il tuo ragionamento. 8 m



Osserva l'ombra della colonna rosa: la parte di ombra sul pavimento è più lunga della corrispondente parte di colonna, mentre la parte di ombra proiettata sulla parete è lunga come la corrispondente parte di...

Altri esercizi a pag. G196

LEZIONE 7

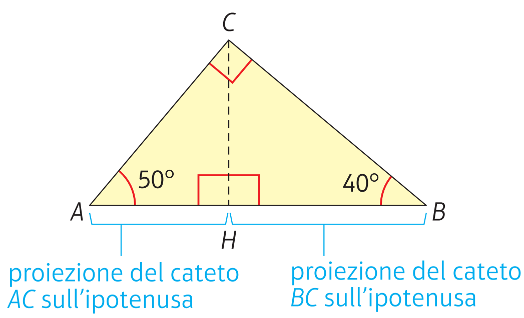
I teoremi di Euclide

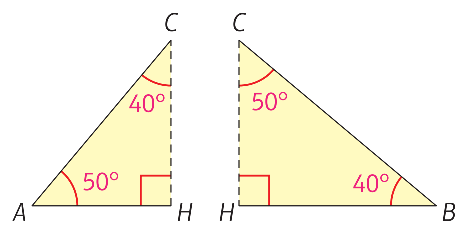
In questa lezione studieremo due proprietà dei triangoli rettangoli basate sulla similitudine. Queste proprietà si chiamano **teoremi di Euclide**.

Euclide è stato un matematico greco vissuto nel 300 a.C.

ESPLORA

Nel triangolo rettangolo **Considera il triangolo rettangolo *ABC* e la sua altezza *CH* relativa all'ipotenusa. Completa la tabella. Scrivi nella figura a destra le ampiezze di tutti gli angoli.**





Il triangolo *ABC* è diviso dall'altezza *CH* in due triangoli rettangoli.

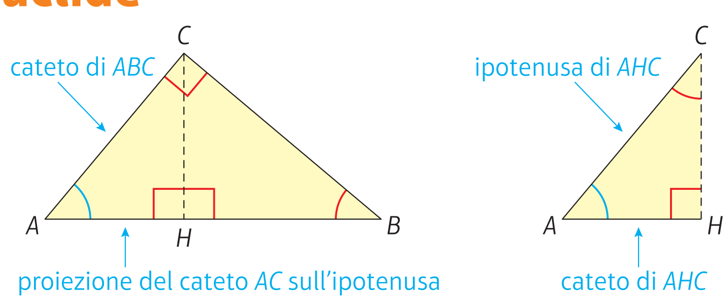
Triangolo *ABC*	Triangolo *AHC*	Triangolo *HBC*
$A\hat{C}B = 90°$	$A\hat{H}C = 90°$	$B\hat{H}C = 90°$
$B\hat{A}C = 50°$	$C\hat{A}H = 50°$	$B\hat{C}H = 50°$
$A\hat{B}C = 40°$	$H\hat{C}A = 40°$	$H\hat{B}C = 40°$

Ricorda che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Osserviamo che i triangoli considerati hanno i tre angoli corrispondenti congruenti, perciò sono tutti simili tra loro per il primo criterio di similitudine.
Di conseguenza i loro lati corrispondenti sono tutti nella stessa proporzione.
È proprio da questa osservazione che nascono i due teoremi di Euclide.
Noi abbiamo preso come esempio un triangolo con gli angoli di 90°, 50°, 40°, ma l'osservazione vale per **qualunque triangolo rettangolo**.

Il primo teorema di Euclide

Per spiegare il primo teorema di Euclide, consideriamo il triangolo originale *ABC* e la sua parte *AHC*.



I due triangoli sono simili, perciò possiamo scrivere la proporzione:

$$\underbrace{AB}_{\text{ipotenusa di }ABC} : \underbrace{AC}_{\text{ipotenusa di }AHC} = \underbrace{AC}_{\text{cateto di }ABC} : \underbrace{AH}_{\text{cateto di }AHC}$$

Lo stesso ragionamento si può fare anche per il cateto BC, per il quale vale la seguente proporzione:

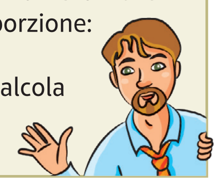
$AB : BC = BC : HB$

Il **medio proporzionale** tra due numeri a e b è il numero x che soddisfa la proporzione:

$a : x = x : b$

Il suo valore si calcola con la formula:

$x = \sqrt{a \cdot b}$



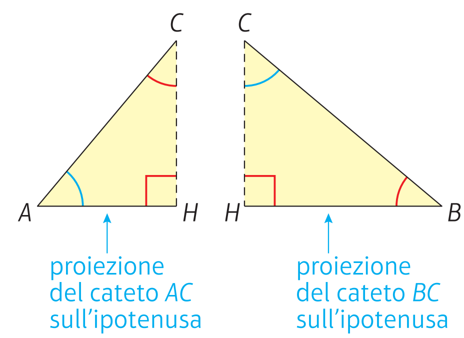
CONCETTO CHIAVE

Primo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo **un cateto è medio proporzionale** tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

Il secondo teorema di Euclide

Per spiegare il secondo teorema di Euclide, consideriamo di nuovo le due parti AHC e HBC in cui il triangolo ABC è diviso dalla sua altezza CH. I due triangoli sono simili, perciò possiamo scrivere la proporzione:



altezza

proiezione del cateto AC → $AH : CH = CH : HB$ ← proiezione del cateto CB

CONCETTO CHIAVE

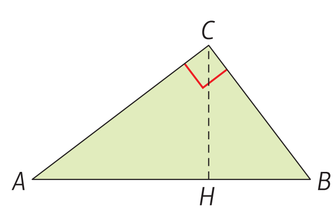
Secondo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo, **l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale** tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

ESERCIZI GUIDA

1 Primo teorema di Euclide

Nel triangolo rettangolo *ABC* il cateto maggiore è lungo 20 m e la sua proiezione sull'ipotenusa misura 16 m. Calcola la lunghezza dell'ipotenusa.



Usiamo il primo teorema di Euclide:

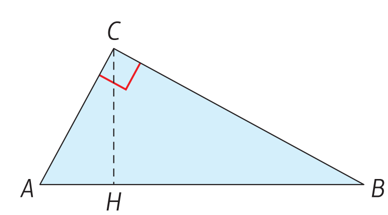
$AB : AC = AC : AH$

$\overline{AB} : 20 = 20 : 16$

$\overline{AB} = \dfrac{20 \cdot 20}{16} = 25 \text{ m}$

2 Secondo teorema di Euclide

Nel triangolo rettangolo *ABC* le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 5 cm e 16,2 cm. Calcola l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area del triangolo *ABC*.



1) Usiamo il secondo teorema di Euclide:

$AH : CH = CH : HB$

$5 : \overline{CH} = \overline{CH} : 16{,}2$

$\overline{CH} = \sqrt{5 \cdot 16{,}2} = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$

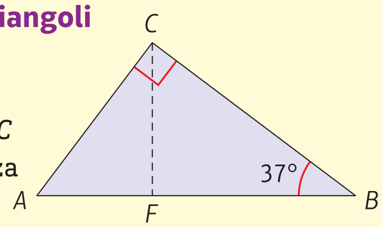
2) $\overline{AB} = 5 + 16{,}2 = 21{,}2 \text{ cm}$

$A_{ABC} = \dfrac{21{,}2 \cdot 9}{2} = 95{,}4 \text{ cm}^2$

ESERCIZI DELLA LEZIONE 7

CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE

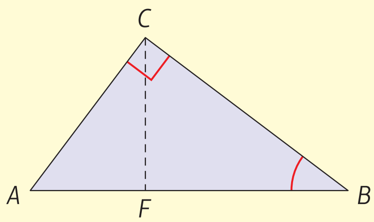
1 Angoli dei triangoli Considera il triangolo rettangolo *ABC* e la sua altezza *CF* relativa all'ipotenusa.



Completa la tabella scrivendo le misure degli angoli richiesti.

Triangolo *ABC*	Triangolo *AFC*	Triangolo *CFB*
$B\hat{A}C = 53°$	$C\hat{A}F = 53°$	$F\hat{C}B = 53°$
$A\hat{B}C = 37°$	$A\hat{C}F = 37°$	$F\hat{B}C = 37°$
$A\hat{C}B = 90°$	$A\hat{F}C = 90°$	$C\hat{F}B = 90°$

2 Triangoli simili Considera di nuovo il triangolo *ABC* dell'esercizio precedente.



Scrivi quali sono i lati e gli angoli corrispondenti nei triangoli *AFC* e *CFB*.

a. Il corrispondente di *AC* è *BC*

b. Il corrispondente di *AF* è *FC*

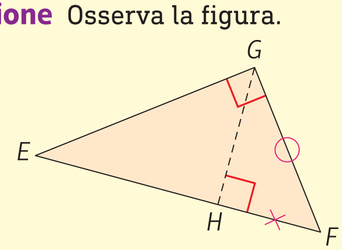
c. Il corrispondente di $C\hat{A}F$ è $F\hat{C}B$

d. Il corrispondente di $A\hat{C}F$ è $F\hat{B}C$

Spiega perché *AFC* e *CFB* sono simili:

hanno gli angoli corrispondenti congruenti

3 Proiezione Osserva la figura.

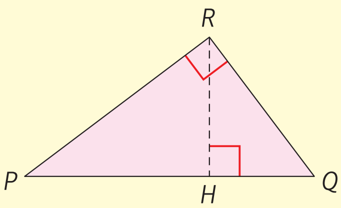


a. Indica con una crocetta la proiezione del cateto *GF* sull'ipotenusa del triangolo rettangolo *EFG*.

b. Indica con un cerchietto l'ipotenusa del triangolo *GHF*.

4 Primo teorema di Euclide
Completa l'enunciato.
In ogni triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa

5 Proporzioni del primo Completa le proporzioni che esprimono il primo teorema di Euclide relativamente al triangolo *PRQ*.

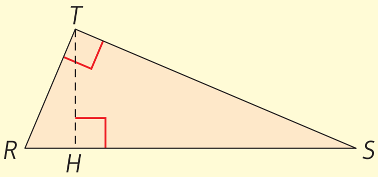


$PQ : PR = PR : PH$

$PQ : RQ = RQ : HQ$

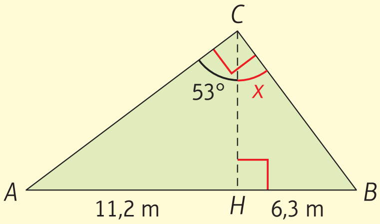
6 Secondo teorema di Euclide
Completa l'enunciato.
In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

7 Proporzione del secondo Completa la proporzione che esprime il secondo teorema di Euclide relativamente al triangolo *RST*.



$RH : TH = TH : HS$

8 Simili *ABC* è un triangolo rettangolo e *CH* è l'altezza relativa all'ipotenusa.



a. Quanto è ampio l'angolo $H\hat{C}B$, indicato con x? 37°

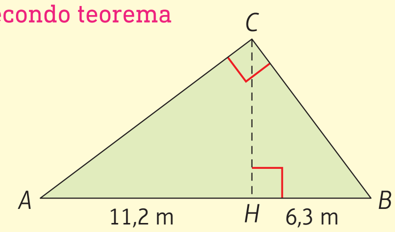
b. Spiega perché i triangoli *AHC* e *BAC* sono simili.

APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI

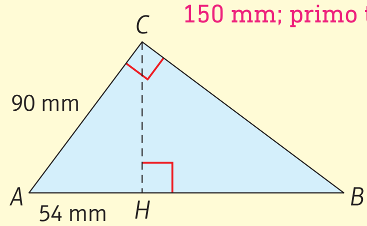
Usa i teoremi di Euclide Nei seguenti esercizi di applicazione:

a. usa i teoremi di Euclide per trovare la misura richiesta;
b. spiega quale teorema hai applicato;
c. se necessario, usa la calcolatrice e arrotonda i risultati alla seconda cifra decimale. ESERCIZI GUIDA 1, 2

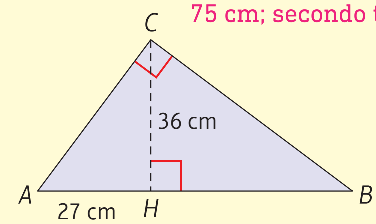
9 Calcola la misura di *CH*.
8,4 m; secondo teorema



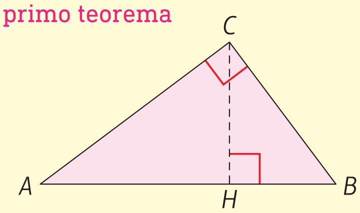
10 Calcola la lunghezza dell'ipotenusa di *ABC*.
150 mm; primo teorema



11 Calcola la misura di *AB*.
75 cm; secondo teorema

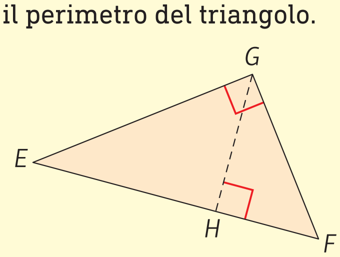


12 Sapendo che $\overline{AB} = 25$ cm e $\overline{HB} = 9$ cm, calcola la lunghezza di *BC*.
15 cm; primo teorema

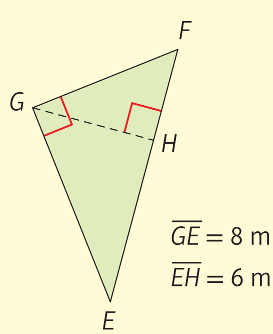


RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

13 Perimetro Nel triangolo rettangolo *EFG*, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 14,4 cm e 25,6 cm.
Calcola il perimetro del triangolo. [96 cm]



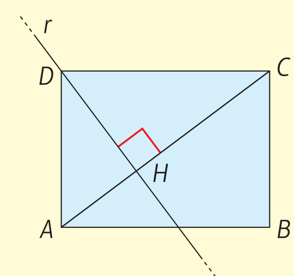
14 Area Calcola l'area del triangolo *GEF* utilizzando i dati riportati nella figura. [28,3 m^2]



$\overline{GE} = 8$ m
$\overline{EH} = 6$ m

15 SFIDA **Quadrato** In un triangolo rettangolo, un cateto misura 12 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa 7,2 cm.
Calcola l'area del quadrato che ha lo stesso perimetro del triangolo. 144 cm^2

16 SFIDA **Rettangolo** Osserva la figura.
Dal vertice *D* del rettangolo *ABCD* si traccia la retta *DH* perpendicolare alla diagonale *AC*.



Sapendo che:
- $\overline{AH} = 11{,}25$ cm
- $\overline{HC} = 20$ cm

calcola l'area del rettangolo. 468,75 cm^2

Altri esercizi a pag. G200

LEZIONE 8

Relazione fra i perimetri e fra le aree di figure simili

Raddoppiare e triplicare le dimensioni

Immagina di raddoppiare le dimensioni di una figura.
Si ottiene una nuova figura **simile** alla prima con rapporto di scala uguale a 2.

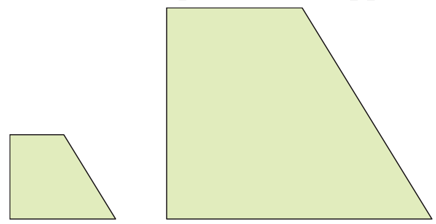
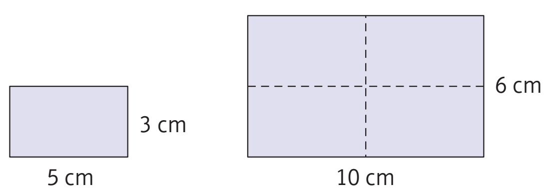


figura **A** figura **B**

Come varia il perimetro della figura? E la sua area?
Facciamo una prova nel caso di un rettangolo.

ESPLORA

Rettangolo doppio **Il rettangolo B è un ingrandimento in scala del rettangolo A secondo il rapporto 2. Come vedi dalla figura, le dimensioni di B sono lunghe il doppio di quelle di A.**



rettangolo **A** rettangolo **B**

a. **Qual è il rapporto fra il perimetro di B e quello di A?**
b. **Qual è il rapporto fra l'area di B e quella di A?**

Perimetro

1) Perimetro del rettangolo A:

$$p_A = 5 + 5 + 3 + 3 = 16 \text{ cm}$$

2) Perimetro del rettangolo B:

$$p_B = 10 + 10 + 6 + 6 = 32 \text{ cm}$$

3) Rapporto fra i perimetri:

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{32 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = 2$$

Il **perimetro** di B è **2 volte** il perimetro di A.
Osserviamo che il rapporto fra i perimetri è **uguale al rapporto di scala.**

Area

1) Area del rettangolo A:

$$\text{Area}_A = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2$$

2) Area del rettangolo B:

$$\text{Area}_B = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$$

3) Rapporto fra le aree:

$$\frac{\text{Area}_B}{\text{Area}_A} = \frac{60 \text{ cm}^2}{15 \text{ cm}^2} = 4$$

L'**area** di B è **4 volte** l'area di A.
Osserviamo che il rapporto fra le aree è **uguale al quadrato del rapporto di scala**.

Esaminiamo ora cosa accade se il rapporto di scala è 3.

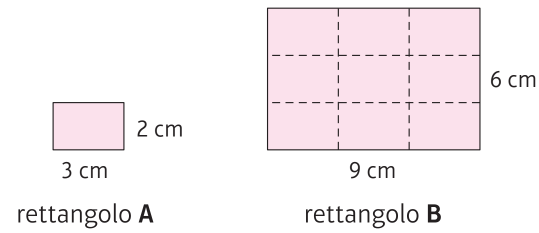
0080_9788839527189B@0145-0177.indd 172 14/01/19 16:19

ESPLORA

Rettangolo triplo **Il rettangolo B è un ingrandimento in scala del rettangolo A secondo il rapporto 3.**

a. Qual è il rapporto fra il perimetro di B e quello di A?

b. Qual è il rapporto fra l'area di B e quella di A?



Perimetro

1) Perimetro del rettangolo A:

$p_A = 3 + 3 + 2 + 2 = 10$ cm

2) Perimetro del rettangolo B:

$p_B = 9 + 9 + 6 + 6 = 30$ cm

3) Rapporto fra i perimetri:

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{30\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 3$$

Il perimetro di B è **3 volte** il perimetro di A.
Osserviamo che anche in questo caso il rapporto fra i perimetri è **uguale al rapporto di scala**.

Area

1) Area del rettangolo A:

$\text{Area}_A = 3 \cdot 2 = 6$ cm²

2) Area del rettangolo B:

$\text{Area}_B = 9 \cdot 6 = 54$ cm²

3) Rapporto fra le aree:

$$\frac{\text{Area}_B}{\text{Area}_A} = \frac{54\ \text{cm}^2}{6\ \text{cm}^2} = 9$$

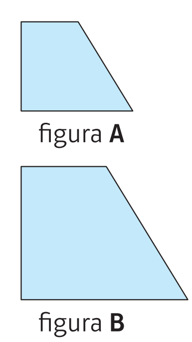
L'area di B è **9 volte** l'area di A.
Osserviamo che anche in questo caso il rapporto fra le aree è **uguale al quadrato del rapporto di scala**.

I due esercizi precedenti ci permettono di scrivere le seguenti proprietà.

CONCETTO CHIAVE

Rapporto fra i perimetri e fra le aree di due figure simili

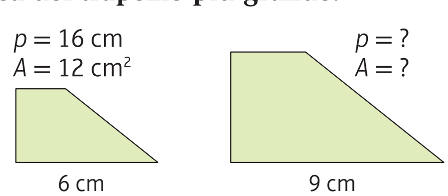
Se due figure A e B sono simili, con rapporto di scala ***k***, allora:
- il **rapporto fra i loro perimetri** è uguale al rapporto di scala;
- il **rapporto fra le loro aree** è uguale al **quadrato** del rapporto di scala.



$$\frac{p_B}{p_A} = k \rightarrow p_B = p_A \cdot k \qquad \frac{\text{Area}_B}{\text{Area}_A} = k^2 \rightarrow \text{Area}_B = \text{Area}_A \cdot k^2$$

ESERCIZIO GUIDA **CON VIDEO TUTORIAL**

1 Trapezi **I due trapezi in figura sono simili. Calcola il perimetro e l'area del trapezio più grande.**



1) Usiamo le misure delle due basi per calcolare il rapporto di scala:

$$k = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

2) Usiamo il rapporto di scala per calcolare il perimetro del trapezio grande:

$$p = 16 \cdot 1{,}5 = 24\ \text{cm}$$

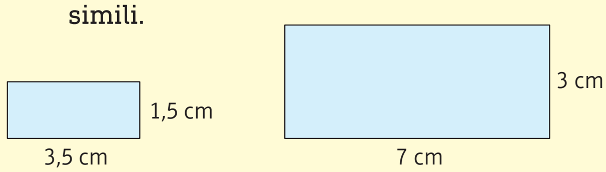
3) Usiamo il rapporto di scala per calcolare l'area del trapezio grande:

$$\text{Area} = 12 \cdot 1{,}5^2 = 27\ \text{cm}^2$$

ESERCIZI DELLA LEZIONE 8

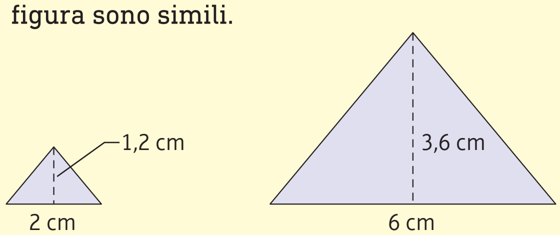
CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE

1 Verifica 1 I due rettangoli nella figura sono simili.



a. Qual è il rapporto di scala? 2
b. Qual è il rapporto fra i loro perimetri? 2
c. Qual è il rapporto fra le loro aree? 4
d. Verifica che il rapporto fra i perimetri è uguale al rapporto di scala. $\frac{20}{10} = 2$

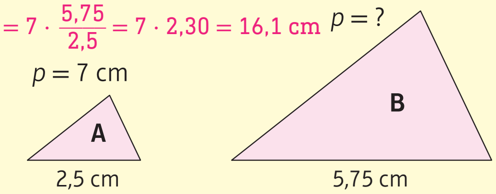
2 Verifica 2 I due triangoli isosceli nella figura sono simili.



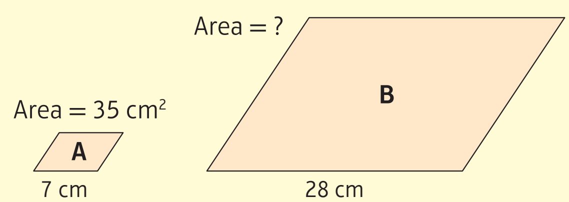
a. Qual è il rapporto di scala? 3
b. Qual è il rapporto fra i loro perimetri? 3
c. Qual è il rapporto fra le loro aree? 9
d. Verifica che il rapporto fra le aree è uguale al quadrato del rapporto di scala. $\frac{10{,}8}{1{,}2} = 9$

3 Formula 1 I triangoli A e B sono simili. Quale formula applichi per calcolare il perimetro del triangolo B? Scrivi la formula e fai il calcolo. ESERCIZIO GUIDA 1

$p_B = p_A \cdot k = 7 \cdot \frac{5{,}75}{2{,}5} = 7 \cdot 2{,}30 = 16{,}1$ cm



4 Formula 2 I quadrilateri A e B sono simili. Quale formula applichi per calcolare l'area del quadrilatero B? ESERCIZIO GUIDA 1



$Area_B = Area_A \cdot k^2 = 35 \cdot \left(\frac{28}{7}\right)^2 = 35 \cdot 16 = 560 \text{ cm}^2$

5 Vero o falso? Una fotografia viene ingrandita 5 volte rispetto alla dimensione originale. Indica con una crocetta se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a. L'area della foto grande è 5 volte l'area della foto originale. V ☒F
b. L'area della foto grande è 25 volte l'area della foto originale. ☒V F
c. Il perimetro della foto grande è 5 volte il perimetro della foto originale. ☒V F
d. Il perimetro della foto grande è 25 volte il perimetro a della foto originale. V ☒F
e. Se la foto originale era larga 5 cm, allora l'ingrandimento è largo 25 cm. ☒V F
f. Se la foto originale era larga 8 cm, allora l'ingrandimento è largo 40 cm. ☒V F

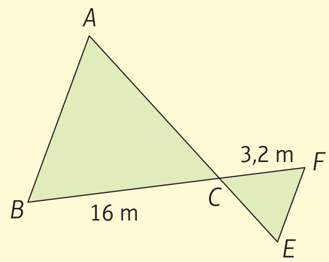
APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI

6 Perimetro Due rettangoli sono simili. Il primo ha la base lunga 4 cm e il perimetro di 24 cm. Il secondo ha la base lunga 11 cm. Calcola il perimetro del secondo rettangolo. [66 cm]

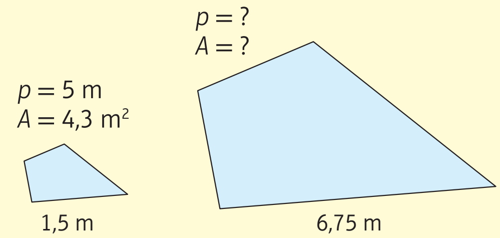
7 Area Due rettangoli sono simili. Il primo ha la base lunga 2 cm e l'area di 18 cm^2. Il secondo ha la base lunga 8 cm. Calcola l'area del secondo rettangolo. [288 cm^2]

8 Fotografia Una fotografia originale misura 10 cm × 15 cm. Se la ingrandisci 1,5 volte (una volta e mezza), quale sarà l'area della nuova fotografia? 337,5 cm^2

9 Triangoli Il triangolo *ABC* è simile al triangolo *CEF*.
Sapendo che il perimetro di *ABC* è 46 m, calcola il perimetro di *CEF*. [9,2 m]

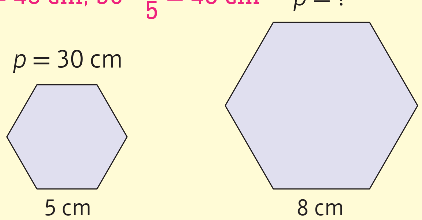


10 Quadrilateri I due quadrilateri sono simili. Calcola il perimetro e l'area del quadrilatero grande. [22,5 m; 87,075 m^2]



RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

11 In due modi Calcola in due modi diversi il perimetro dell'esagono grande.
Spiega i procedimenti che hai applicato.
$8 \cdot 6 = 48$ cm; $30 \cdot \frac{8}{5} = 48$ cm



12 MONDO REALE **Televisori** Gli schermi di due televisori sono due rettangoli simili. Nella tabella sono riportate alcune misure.

Dimensioni dello schermo di due televisori

Misura / Schermo	Altezza (cm)	Larghezza (cm)	Area (cm²)
A (28 pollici)	34,87	61,99	2161,59
B (84 pollici)	104,61	185,97	19 454,31

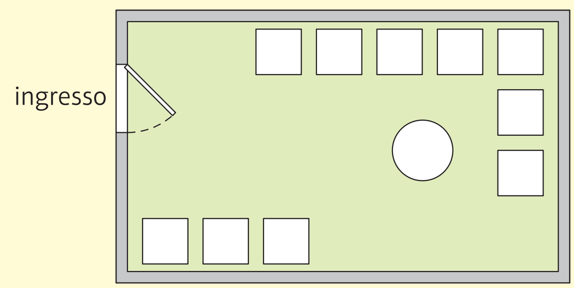
Completa la tabella.

a. Verifica che le dimensioni dello schermo B sono 3 volte più grandi di quelle dello schermo A.

b. Verifica che l'area dello schermo B è 9 volte più grande di quella dello schermo A.

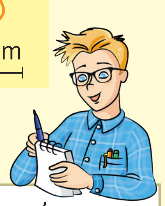
13 Problema inverso Due rettangoli sono simili. Il primo ha la base lunga 4 cm e l'area di 32 cm^2. Il secondo ha l'area di 200 cm^2.
Calcola il perimetro del secondo rettangolo. [60 cm]

14 Area della sala Nella figura è disegnata la pianta della sala d'aspetto di un medico.
Calcola l'area della sala d'aspetto. [21,6 m^2]



sala d'aspetto - scala 1 : 100

MONDO REALE **Area sulla mappa** Usa la mappa riportata in figura per stimare l'area del Lago Trasimeno. circa 127 km^2; è accettabile tra 100 e 160 km



1) Traccia un rettangolo che abbia un'area all'incirca uguale a quella del lago.
2) Usa il rapporto di scala per calcolare le dimensioni del rettangolo nella realtà.
3) Calcola l'area del rettangolo nella realtà.

Altri esercizi a pag. **G204**